

**НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ  
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ  
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»**

**Фізико-математичний факультет  
Кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей**

«На правах рукопису»  
УДК \_\_\_\_519.863 \_\_\_\_

«До захисту допущено»

Завідувач кафедри

\_\_\_\_\_ О.І. Клесов

«\_\_» \_\_\_\_\_ 20\_\_ р.

**Магістерська дисертація**

**на здобуття ступеня магістра**

**зі спеціальності 111 «Математика»**

**на тему: «Оптимізація економічних показників робастної лінійної моделі  
малого підприємства»**

Виконала:

студентка VI курсу, групи ОМ-71мп  
Перевознюк Тетяна Ігорівна

\_\_\_\_\_

Керівник:

кандидат фізико-математичних наук, доцент  
Алексеева І.В.

\_\_\_\_\_

Рецензент:

завідувач відділу Інституту кібернетики  
ім. В.М. Глушкова НАН України,  
д.ф.-м.н., с.н.с.  
Стецюк П.І.

\_\_\_\_\_

Засвідчую, що у цій магістерській  
дисертації немає запозичень з праць  
інших авторів без відповідних  
посилань.  
Студентка \_\_\_\_\_

Київ – 2018 року

**Національний технічний університет України**  
**«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»**

Фізико-математичний факультет

Кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей

Рівень вищої освіти – другий (магістерський) за освітньо-професійною програмою

Спеціальність (спеціалізація) – 111 «Математика» («Страхова та фінансова математика»)

ЗАТВЕРДЖУЮ

Завідувач кафедри

\_\_\_\_\_ О.І. Клесов

«\_\_\_» \_\_\_\_\_ 20\_\_ р.

**ЗАВДАННЯ**

**на магістерську дисертацію студенту**

**Перевознюк Тетяні Ігорівні**

1. Тема дисертації «Оптимізація економічних показників робастної лінійної моделі малого підприємства», науковий керівник дисертації Алексєєва І.В., канд. фіз.-мат. наук, доцент, затверджені наказом по університету від «01» листопада 2018 р. №4058-С
2. Термін подання студентом дисертації до 10.12.2018
3. Об'єкт дослідження: модель малого ІТ підприємства.
4. Вихідні дані: технологічна таблиця для побудови математичної моделі, методи розв'язання задачі робастної оптимізації.
5. Перелік завдань, які потрібно розробити:
  - побудувати модель розвитку малого ІТ підприємства на 1 рік;
  - побудова робастного аналога вихідної детермінованої задачі;

- знайти розв'язки моделі для різних типів множин невизначеностей, використовуючи пакет прикладних програм Matlab;
- проаналізувати недоліки та переваги методів розв'язання та отримані результати.

6. Орієнтовний перелік графічного (ілюстративного) матеріалу: 17 слайдів.

7. Дата видачі завдання 03.09.2018

#### Календарний план

№ з/п	Назва етапів виконання магістерської дисертації	Термін виконання етапів магістерської дисертації	Примітка
1	Пошук літератури з тематики дипломної роботи.	03.09.18-05.09.18	
2	Опрацювання літературних джерел.	06.09.18-19.10.18	
3	Вивчення методів розв'язання задач лінійного програмування з невизначеністю даних.	20.10.18-29.10.18	
4	Побудова моделі розвитку малого ІТ підприємства на 1 рік та з використанням робастної лінійної моделі, розв'язати задачу знаходження доходу підприємства для різних типів множини невизначеностей.	30.10.18-20.11.18	
5	Аналіз отриманих розв'язків, вибір найкращого за методом.	21.11.18-30.11.18	
6	Оформлення дипломної роботи.	01.12.18-09.12.18	

Студент

Перевознюк Т. І.

Науковий керівник дисертації

Алексеева І.В.

## РЕФЕРАТ

Магістерська дисертація: 51 сторінок, 7 рисунків,  
8 таблиць, 5 додатків, 9 першоджерел.

В даній магістерській дисертації розглядається сучасний підхід до розв'язання лінійних оптимізаційних задач з невизначеностями. Він передбачає побудову робастного аналога вихідної детермінованої задачі. В залежності від множини невизначеностей, робастна оптимізаційна задача зводиться або до стандартної задачі лінійного програмування, або до більш складної нелінійної задачі. З використанням робастної лінійної моделі, розв'язано задачу знаходження доходу малого підприємства для різних типів множини невизначеностей. Чисельна реалізація розв'язків виконана з використанням пакету прикладних програм Matlab.

Ключові слова: задача лінійної оптимізації, робастна оптимізація, робастний аналог, множина невизначеності.

## РЕФЕРАТ

Магистерская диссертация: 51 страница, 7 рисунков,  
8 таблиц, 5 приложений, 9 первоисточников.

В данной магистерской диссертации рассматривается современный подход к решению линейных оптимизационных задач с неопределенностью. Он предусматривает построение робастного аналога исходной детерминированной задачи. В зависимости от множества неопределенностей, робастная оптимизационная задача сводится или к стандартной задаче линейного программирования, или к более сложной нелинейной задаче. С использованием робастной линейной модели, решена задача поиска доходов малого предприятия для различных типов множества неопределенностей. Численная реализация решений выполнена с использованием пакета прикладных программ Matlab.

Ключевые слова: задача линейной оптимизации, робастная оптимизация, робастный аналог, области неопределенности.

## **ABSTRACT**

Master's thesis: 51 pages, 7 picture,  
8 tables, 5 applications, 9 primary sources.

In this thesis the modern approach of solving linear optimization problems with uncertainty is presented. It involves the construction of a robust counterpart of the initial deterministic problem. Depending on the uncertainty sets, a robust optimization problem is brought either to a standard linear programming problem, or to a more complex nonlinear problem. Using the robust linear model, the problem of finding the income of a small enterprise for various types of uncertainty sets is solved. Numerical realization of solutions is made using the package of Matlab applications.

Key words: linear optimization problem, robust optimization, robust counterpart, uncertainty set.

## ЗМІСТ

ВСТУП.....	8
РОЗДІЛ 1. Робастна оптимізація в задачах лінійного програмування.....	10
1.1 Поняття про робастну оптимізацію.....	10
1.2 Області невизначеності. ....	13
РОЗДІЛ 2. Теоретичні відомості робастної оптимізації для різних типів областей невизначеностей.....	18
РОЗДІЛ 3. Імовірнісні гарантії робастної оптимізації.....	26
РОЗДІЛ 4. Оптимізація доходу малого підприємства.....	34
4.1. Побудова математичної моделі підприємства у вигляді задачі лінійного програмування.....	34
4.2. Розв'язання задачі робастної оптимізації для різних областей невизначеності збурених даних.....	35
4.3. Розв'язання цілочислової задачі робастної оптимізації.....	40
ВИСНОВОК.....	42
ЛІТЕРАТУРА. ....	43
Додаток 1.....	44
Додаток 2.....	45
Додаток 3.....	47
Додаток 4.....	49
Додаток 5.....	50

## ВСТУП

В багатьох прикладних задачах оптимізації параметри задач вважаються точно відомими. Однак це рідко відбувається на практиці. Зазвичай реальні дані мають невизначеності через їх випадковий характер, неточність вимірювань та інші причини.

Існують різні підходи урахування невизначеностей в даних задачі. Так, післяоптимізаційний аналіз розв'язків дозволяє визначити можливі межі змінення параметрів обмежень і цільової функції задачі, за яких зберігається одержаний оптимальний план та виявити параметри, до змінення яких цей розв'язок є найбільш чутливим.

В стохастичному програмуванні розробляються методики знаходження розв'язків оптимізаційних задач, які використовують знання законів розподілу ймовірностей для вхідних даних чи їх оцінок.

В останні роки, все більшу популярність набирає методологія оптимізації при невизначеності в даних, що має назву робастна оптимізація.

Вперше такий підхід до задач лінійного програмування запропонував в 1973 р. A.L. Soyster [1], який розглядав прості збурення в даних задачі і намагався переформулювати початкову проблему для одержання розв'язку, допустимого при всіх невизначеностях в параметрах умов. Запропонована методика призводила до суттєвого погіршення отриманого значення цільової функції порівняно з оптимальним розв'язком детермінованого аналога задачі.

Після майже 25-річного забуття, методика робастної оптимізації отримала продовження в роботах A. Ben-Tal, A. Nemirovski, A. Goryashko [2,3,4], яким, в певній мірі, вдалося поєднати надійність і ефективність розв'язку.

Нові підходи до описання геометрії області невизначеності запропоновано в роботах D. Bertsimas, M. Sim [5], Z. Li, R. Ding, and C. A. Floudas [6]. В роботі Z. Li, R. Ding, and C. A. Floudas [7] наведено ймовірнісні гарантії робастної оптимізації. В дипломній роботі [8] розглядалась задача



оптимізації економічних показників малого підприємства на основі багатокритеріальної задачі лінійного програмування.

**Мета дипломної роботи:**

- Побудувати детерміновану модель задачі розвитку малого ІТ підприємства;
- З використанням робастної лінійної моделі, розв'язати задачу знаходження доходу малого підприємства для різних типів множини невизначеностей;
- Проаналізувати та порівняти одержані розв'язки.

# РОЗДІЛ 1. Робастна оптимізація в задачах лінійного програмування

## 1.1 Поняття про робастну оптимізацію.

В останні роки, все більшу популярність набирає методологія оптимізації при невизначеності в даних – *робастна оптимізація*.

Нехай задана задача лінійного програмування (ЗЛП)

$$\begin{aligned} \max_X & C^T X \\ AX & \leq B, \\ X & \geq 0, \end{aligned}$$

де  $X \in \mathbb{R}^n$  - вектор змінних управління,  $C \in \mathbb{R}^n$  - вектор коефіцієнтів цільової функції,  $A_{m \times n}$  - матриця обмежень,  $B \in \mathbb{R}^m$  - вектор правих частин.

Зрозуміло, що для різних наборів вхідних даних, буде одержано різні розв'язки (рис.1).

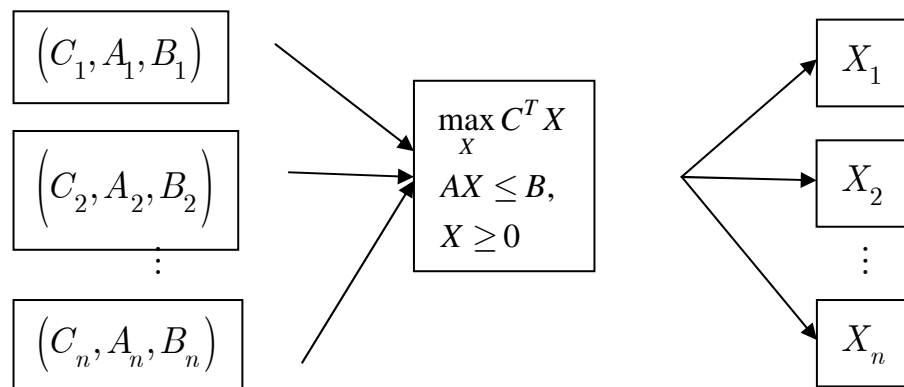


Рис.1

Задача полягає в знаходженні розв'язку, який був би «імунізований» до помилок оцінок і мінливості вхідних даних (рис.2).

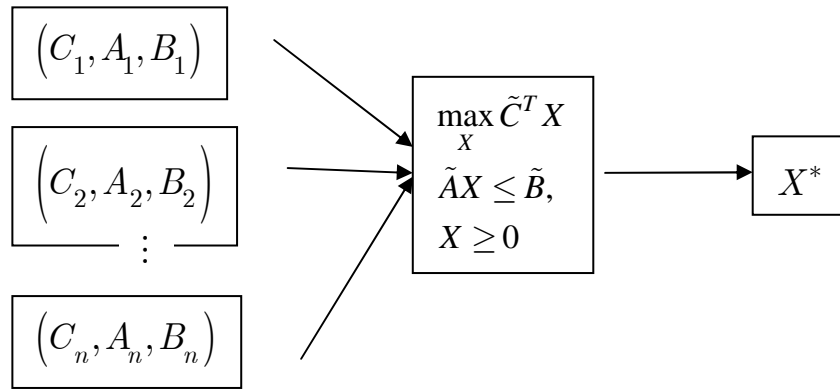


Рис.2

### Означення 1.

Задачею лінійного програмування з невизначеністю даних (НЗЛП) називають множину  $\left\{ \max_X \left\{ C^T X : A(\xi) X \leq B, X \geq 0 \right\} \right\}_{\xi \in U}$  (1)

ЗЛП загальної структури з різними даними, що належать заданій області невизначеності.

### Означення 2.

Вектор  $X \in \mathbb{R}^n$  називається *робастно допустимим* розв'язком ЗЛПН, якщо він задовольняє усім реалізаціям обмежень з заданої області невизначеності, тобто  $A(\xi) X \leq B, X \geq 0, \forall \xi \in U$ .

### Означення 3.

*Робастним аналогом* (Robust Counterpart) НЗЛП (1) називається оптимізаційна задача

$$\begin{aligned} & \max_X C^T X \\ & \max_{\xi \in U} A(\xi) X \leq B, \\ & X \geq 0. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Концепція робастності суттєво залежить від виду множини невизначеності  $U$ , від того в якій мірі ми намагаємося охопити рівень захисту від збурення даних.

В робастній постановці задачі припускають:

1) Нехай  $J_i$  - підмножина індексів  $i$ -го рядка, яка містить змінні індекси, відповідні коефіцієнти яких мають невизначеності. Кожний елемент  $a_{ij}$  в  $J_i$  матриці  $A$  стає випадковою величиною  $\tilde{a}_{ij}$  з симетричного і обмеженого інтервалу  $[a_{ij} - \hat{a}_{ij}; a_{ij} + \hat{a}_{ij}]$ , де  $a_{ij}$  - номінальне значення,  $\hat{a}_{ij} > 0$  - збурення  $a_{ij}$ .

2) Покладемо  $\xi_{ij} = \frac{\tilde{a}_{ij} - a_{ij}}{\hat{a}_{ij}}$ , що відповідає невідомому розподілу ймовірностей і набуває значень в  $[-1; 1]$ .

Отже, з (2) маємо

$$\max_x \sum_j c_j x_j \quad (1.3)$$

$$\sum_j a_{ij} x_j + \max_{\xi \in U} \left\{ \sum_{j \in J_i} \xi_{ij} \hat{a}_{ij} x_j \right\} \leq b_i, \forall i \quad (1.4)$$

$$x_j \geq 0, \forall j \quad (1.5)$$

Робастна оптимізаційна задача є дворівневою і суттєво залежить від геометрії множини невизначеності.

### **Зауваження 1.**

1. Якщо

$$\tilde{b}_i = b_i + \xi_{i0} \hat{b}_i,$$

то умову (1.4) записують у вигляді

$$\sum_j a_{ij} x_j + \max_{\xi \in U} \left\{ -\xi_{i0} \hat{b}_i + \sum_{j \in J_i} \xi_{ij} \hat{a}_{ij} x_j \right\} \leq b_i, \forall i$$

2. Якщо в цільовій функції (1.3)

$$\sum_j \tilde{c}_j x_j,$$

де

$$\tilde{c}_j = c_j + \xi_{j0} \hat{c}_j$$

то задачу

$$\max_X \min_{\xi \in U} \sum_j \tilde{c}_j x_j = \max_X \min_{\xi \in U} \sum_j (c_j + \xi_{j0} \hat{c}_j) x_j$$

трансформують у рівносильну:

$$\begin{cases} \max_{X, \xi} z \\ z - \sum_j c_j x_j + \max_{\xi \in U} \sum_{j \in J_i} \xi_{j0} \hat{c}_j x_j \leq 0. \end{cases}$$

## 1.2. Области невязаности

Для описания множества невязаностей применяется метрика

$$\|\xi\|_p = \left( \sum_{j \in J_i} |\xi_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \text{ для } p = 1, 2, \infty.$$

### 1. Коробка (Box, Soyster, 1973).

Невязана множина описується з використанням  $\infty$ -норми невязаненого вектора даних  $\xi$  наступним чином

$$U_\infty = \{\xi \mid \|\xi\|_\infty \leq \Psi\} = \{\xi \mid |\xi_j| \leq \Psi, \forall j \in J_i\},$$

де  $\Psi$  - регульований параметр (бюджет невязаности), що контролює розмір заданої невязаности.

$$\max_{\xi \in U} \left\{ \sum_{j \in J_i} \xi_{ij} \hat{a}_{ij} x_j : |\xi_j| \leq \Psi, \forall j \in J_i \right\} = \Psi \sum_{j \in J_i} |\hat{a}_{ij} x_j| = \Psi \sum_{j \in J_i} \hat{a}_{ij} |x_j|.$$

Тобто задача (1.3) – (1.5) набуває вигляду

$$\begin{aligned} & \max_X \sum_j c_j x_j \\ & \sum_j a_{ij} x_j + \Psi \sum_{j \in J_i} \hat{a}_{ij} x_j \leq b_i, \forall i \\ & x_j \geq 0, \forall j \end{aligned} \tag{1.6}$$

Зауважимо, якщо умова  $x_j \geq 0, \forall j$  відсутня, то умова

$\sum_j a_{ij}x_j + \Psi \sum_{j \in J_i} \hat{a}_{ij}|x_j| \leq b_i, \forall i$  рівносильна системі

$$\begin{cases} \sum_j a_{ij}x_j + \Psi \sum_{j \in J_i} \hat{a}_{ij}u_j \leq b_i, \forall i \\ -u_j \leq x_j \leq u_j \\ u_j \geq 0, \forall j \in J_i. \end{cases}$$

Вибір такої множини невизначеності забезпечує максимально можливий рівень захисту і припускає, що усі параметри можуть досягати своїх найгірших можливих значень (найгірший випадок сценарію).

Перевагою такого підходу є простота розв'язання, оскільки робастна оптимізаційна задача зводиться до звичайної задачі лінійного програмування.

Недоліком методу є високий рівень консерватизму, можливе суттєве погіршення значення цільової функції.

Графічна ілюстрація для випадку одного балансового рівняння з двома змінними на рис.3.

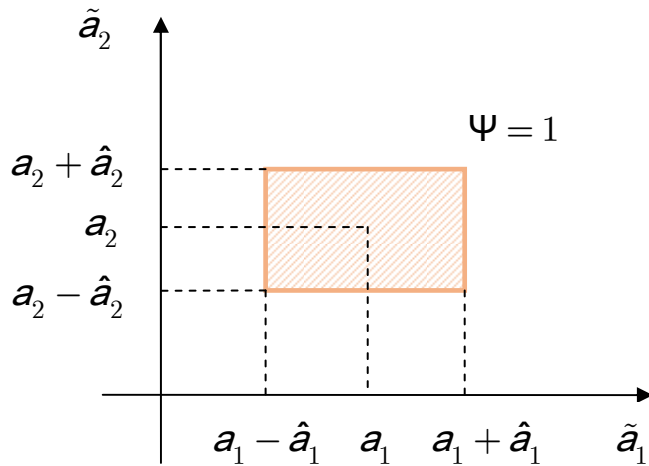


Рис. 3

## 2. Еліпсоїдальна область (Ellipsoidal set, Ben-Tal & Nemirovski, 1998).

Еліпсоїдальна область невизначеності задається з використанням 2-норми невизначеного вектора даних  $\xi$  :

$$U_2 = \left\{ \xi \mid \|\xi\|_2 \leq \Omega \right\} = \left\{ \xi \mid \sum_{j \in J_i} \xi_j^2 \leq \Omega^2 \right\},$$

де  $\Omega$  - бюджет невизначеності, який контролює розмір невизначеної множини. Якщо  $\Omega \geq \sqrt{|J_i|}$ , де  $|J_i|$  - потужність множини  $J_i$ , то весь невизначений простір покривається еліпсоїдальною множиною  $U_2$ .

$$\begin{aligned} \max_{\xi \in U} \left\{ \sum_{j \in J_i} \xi_{ij} \hat{a}_{ij} x_j : \sum_{j \in J_i} \xi_j^2 \leq \Omega^2 \right\} &= \max_{\xi \in U} \left\{ \sqrt{\left( \sum_{j \in J_i} \xi_{ij} \hat{a}_{ij} x_j \right)^2} : \sum_{j \in J_i} \xi_j^2 \leq \Omega^2 \right\} = \\ &= \max_{\xi \in U} \left\{ \sqrt{\left( \sum_{j \in J_i} \xi_{ij}^2 \right) \left( \sum_{j \in J_i} (\hat{a}_{ij} x_j)^2 \right)} : \sum_{j \in J_i} \xi_j^2 \leq \Omega^2 \right\} = \Omega \sqrt{\sum_{j \in J_i} \hat{a}_{ij}^2 x_j^2} \end{aligned}$$

Задача (1.3) – (1.5) запишеться у вигляді

$$\begin{aligned} \max_X \sum_j c_j x_j \\ \sum_j a_{ij} x_j + \Omega \sqrt{\sum_{j \in J_i} \hat{a}_{ij}^2 x_j^2} \leq b_i, \forall i \\ x_j \geq 0, \forall j \end{aligned} \tag{1.7}$$

Основна ідея застосування еліпсоїдальної області полягає у тому, що кутові значення навряд чи відбудуться, що дозволяє в певній мірі контролювати консерватизм і отримувати ефективний розв'язок.

Недоліком є перетворення ЗЛП у більш складний робастний аналог – нелінійну задачу математичного програмування (SOCP).

Графічна ілюстрація на рис. 4.

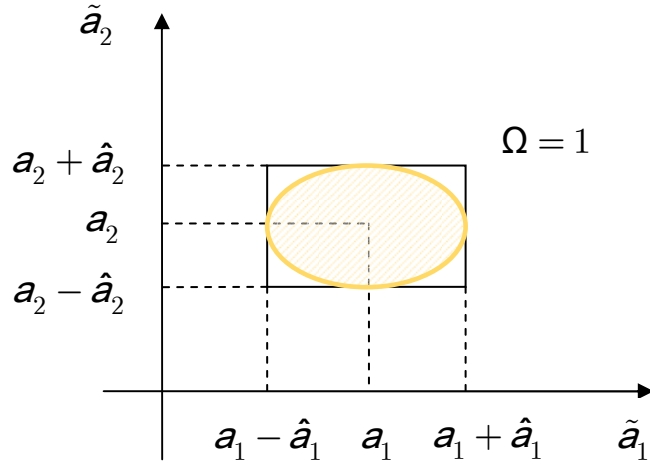


Рис. 4

### 3. Поліедральна множина (Polyhedral set, Bertsimas & Sim, 2004).

Множина невизначеності задається 1-нормою невизначеного вектора даних  $\xi$  :

$$U_1 = \left\{ \xi \mid \|\xi\|_1 \leq \Gamma \right\} = \left\{ \xi \mid \sum_{j \in J_i} |\xi_j| \leq \Gamma \right\},$$

де параметр  $\Gamma$  визначає бюджет невизначеності. Якщо  $\Gamma \geq |J_i|$ , то загальний невизначений простір покривається багатогранною множиною.

$$\max_{\xi \in U} \left\{ \sum_{j \in J_i} \xi_{ij} \hat{a}_{ij} x_j : \sum_{j \in J_i} |\xi_j| \leq \Gamma \right\} = \left\{ \Gamma p_i, p_i \geq \hat{a}_{ij} |x_j| \right\}$$

Тобто для задачі (1.3) – (1.5) маємо:

$$\begin{aligned} & \max_x \sum_j c_j x_j \\ & \sum_j a_{ij} x_j + \Gamma p_i \leq b_i, \forall i \\ & p_i \geq \hat{a}_{ij} |x_j|, \forall j \in J_i \\ & x_j \geq 0, \forall j \end{aligned} \tag{1.8}$$

Розв'язання робастної оптимізаційної задачі зводиться до розв'язання стандартної задачі лінійного програмування.



Запровадження поліедральної множини невизначеності дозволяє контролювати консерватизм, зберігаючи при цьому обчислювальні можливості. Графічна ілюстрація поліедральної множини невизначеності на рис. 5.

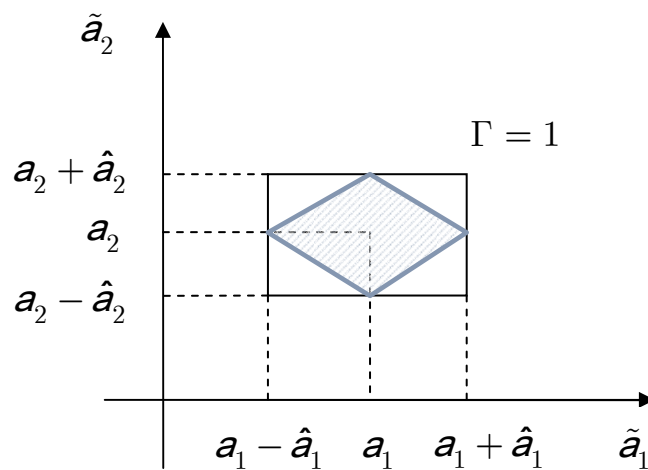


Рис. 5

## РОЗДІЛ 2. Теоретичні відомості робастної оптимізації для різних типів областей невизначеностей

**Властивість 1.** Якщо  $U$  являє собою коробчастий набір невизначеності

$$U_{\infty} = \{\xi \mid \|\xi\|_{\infty} \leq \Psi\} = \{\xi \mid |\xi_j| \leq \Psi, \forall j \in J_i\} \quad (2.1)$$

тоді відповідне стійке обмеження (4) еквівалентне наступному:

$$\sum_j a_{ij} x_j + \Psi \sum_{j \in J_i} \hat{a}_{ij} x_j \leq b_i, \forall i \quad (2.2)$$

*Доведення.*

Для коробчастого набору невизначеності  $U_{\infty} = \{\xi \mid |\xi_j| \leq \Psi, \forall j \in J_i\}$ , ми

визначаємо  $P_{\infty} = [I_{L \times L}; O_{1 \times L}]$ ,  $p_{\infty} = [O_{L \times 1}; \Psi]$  та

$K_{\infty} = \left\{ \left[ \theta_{L \times 1}; t \right] \in R^{L+1} \mid \|\theta\|_{\infty} \leq t \right\}$  де  $L$  це потужність заданої невизначеності (тобто  $L = |J_i|$ ). Тоді внутрішня проблема максимізації в

$$(1.4) \text{ може бути переписана як } \max_{\xi} \left\{ \sum_{j \in J_i} \xi_{ij} \hat{a}_{ij} x_j : P_{\infty} \xi + p_{\infty} \in K_{\infty} \right\}$$

Визначення двоїста змінної  $y = [w_i; \tau_i] \in R^{L+1}$  і використання подвійного конусу  $K : K_{\infty}^* \left\{ \left[ \theta_{L \times 1}; t \right] \in R^{L+1} \mid \|\theta\|_1 \leq t \right\}$ , конусоподібна внутрішня проблема максимізації може бути сформульована як

$$\max_{w, \tau} \left\{ \Psi \tau_i : w_{ij} = \hat{a}_{ij} x_j \forall j, \|w_i\|_1 \leq \tau_i \right\}.$$

Оскільки вищезазначена проблема є проблемою мінімізації, її можна переписати як наступне еквівалентне формулювання, замінивши  $\tau_i$  на

$$\|w_i\|_1 = \sum_{j \in J_i} |w_{ij}|, \min_w \left\{ \Psi \sum_{j \in J_i} |w_{ij}| : w_{ij} = \hat{a}_{ij} x_j \forall j \right\}.$$

Усвідомлюючи, що  $\hat{a}_{ij} \geq 0$ , ми можемо реформувати двоїсту конічну внутрішню задачу максимізації наступним чином

$$\min_w \left\{ \Psi \sum_{j \in J_i} |w_{ij}| : w_{ij} = \hat{a}_{ij} x_j \forall j \right\} = \Psi \sum_{j \in J_i} |\hat{a}_{ij} x_j| = \Psi \sum_{j \in J_i} \hat{a}_{ij} |x_j|$$

Замінивши початкову внутрішню задачу максимізації з наведеною вище конічною двоїстою, отримаємо наступне обмеження:

$$\sum_j a_{ij} x_j + \left[ \Psi \sum_{j \in J_i} \hat{a}_{ij} |x_j| \right] \leq b_i \quad (2.3)$$

**Зауваження 1.** Коли  $\Psi = 1$  (тобто, інтервальний набір невизначеності), робастне формулювання зводиться до  $\sum_j a_{ij} x_j + \sum_{j \in J_i} \hat{a}_{ij} |x_j| \leq b_i$ , яке є запропоновано Сойстером, так званим "найгіршим сценарієм" робастної моделі для обмеженої невизначеності.

**Властивість 2.** Якщо  $U$  являє собою набір еліпсоїдальної невизначеності

$$U_2 = \left\{ \xi \mid \|\xi\|_2 \leq \Omega \right\} = \left\{ \xi \mid \sqrt{\sum_{j \in J_i} \xi_j^2} \leq \Omega \right\}, \quad (2.4)$$

тоді відповідне стійке обмеження (1.4) еквівалентне наступному обмеженню

$$\sum_j a_{ij} x_j + \left[ \Omega \sqrt{\sum_{j \in J_i} \hat{a}_{ij}^2 x_j^2} \right] \leq b_i \quad (2.5)$$

**Доведення.** Розглянемо еліпсоїдальний набір невизначеності

$$U_2 = \left\{ \xi \mid \sqrt{\sum_{j \in J_i} \xi_j^2} \leq \Omega \right\}, \text{ ми визначаємо } P_2 = [I_{L \times L}; O_{1 \times L}], I = \text{diag}\{1, \dots, 1\},$$

$p_2 = [O_{L \times 1}; \Omega]$  і  $K_2 = \left\{ [\theta_{L \times 1}; t] \in R^{L+1} \mid \|\theta\|_2 \leq t \right\}$ , тоді внутрішню задачу максимізації в (1.4) можна позначити як

$$\max_{\xi} \left\{ \sum_{j \in J_i} \xi_{ij} \hat{a}_{ij} x_j : P_2 \xi + p_2 \in K_2 \right\}.$$

Визначаючи двоїсту змінну  $y = [z_i; \tau_i] \in R^{L+1}$  і використовуючи двоїстий конус  $K_2^* = K_2$ , конічна двоїстість внутрішньої проблеми максимізації виглядатиме так:

$$\min \left\{ \Omega \tau_i : z_i = \hat{a}_i x, \|z_i\|_2 \leq \tau_i \right\}.$$

Оскільки це задача мінімізації, ми можемо зробити еквівалентне перетворення вищезазначеної проблеми шляхом заміни  $\tau_i$  з

$$\|z_i\|_2 = \sqrt{\sum_{j \in J_i} z_{ij}^2} \text{ і отримати}$$

$$\min_z \left\{ \Omega \sqrt{\sum_{j \in J_i} z_{ij}^2} : z_i = \hat{a}_i x \right\} = \Omega \sqrt{\sum_{j \in J_i} \hat{a}_{ij}^2 x_j^2}.$$

Після об'єднання вищезазначеної конічної двоїстої задачі в робастний аналог, отримуємо наступний результат

$$\sum_j a_{ij} x_j + \left[ \Omega \sqrt{\sum_{j \in J_i} \hat{a}_{ij}^2 x_j^2} \right] \leq b_i.$$

**Властивість 3.** Якщо  $U$  являє собою набір поліедральної невизначеності

$$U_1 = \left\{ \xi \mid \|\xi\|_1 \leq \Gamma \right\} = \left\{ \xi \mid \sum_{j \in J_i} |\xi_j| \leq \Gamma \right\} \quad (2.6)$$

тоді відповідне стійке обмеження (1.4) еквівалентно наступному обмеженню

$$\begin{cases} \sum_j a_{ij} x_j + \Gamma p_i \leq b_i \\ p_i \geq \hat{a}_{ij} |x_j|, \forall j \in J_i \end{cases} \quad (2.7)$$

**Доведення.** Розглянемо багатогранний набір невизначеності

$$U_1 = \left\{ \xi \mid \sum_{j \in J_i} |\xi_j| \leq \Gamma \right\}, \text{ визначивши } P_1 = \begin{bmatrix} I_{L \times L} & O_{1 \times L} \end{bmatrix}, p_1 = \begin{bmatrix} O_{L \times 1} & \Gamma \end{bmatrix}$$

$K_1 = \left\{ \begin{bmatrix} \theta_{L \times 1} & t \end{bmatrix} \in R^{L+1} \mid \|\theta\|_1 \leq t \right\}$  тоді набір  $U_1$  можна позначити як

$$U_1 = \left\{ \xi \mid P_1 \xi + p_1 \in K_1 \right\}, \text{ а внутрішню задачу максимізації (1.4) –}$$

$$\max_{\xi} \left\{ \sum_{j \in J_i} \xi_{ij} \hat{a}_{ij} x_j : P_1 \xi + p_1 \in K_1 \right\}.$$

Визначаємо двоїсту змінну  $y = \begin{bmatrix} z_i & \tau_i \end{bmatrix} \in R^{L+1}$  виходячи з того, що двоїстий конус  $K_1$  має вигляд

$$K_1^* = K_\infty = \left\{ \begin{bmatrix} \theta_{L \times 1} & t \end{bmatrix} \in R^{L+1} \mid \|\theta\|_\infty \leq t \right\}.$$

Проблема кінчної двоїстої внутрішньої оптимізації може бути сформульована так:

$$\min_{z, \tau} \left\{ \Gamma \tau_i : z_i = \hat{a}_i x, \|z_i\|_\infty \leq \tau_i \right\},$$

яка може бути далі переписана у вигляді наступної еквівалентної формули,

$$\text{замінивши } \tau_i \text{ на } \|z_i\|_\infty = \max_{j \in J_i} |z_{ij}|.$$

Отримаємо

$$\min_z \left\{ \Gamma \max_{j \in J_i} |z_{ij}| : z_i = \hat{a}_i x \right\} = \Gamma \max_{j \in J_i} |\hat{a}_{ij} x_j|$$

Оскільки вищенаведена проблема є проблемою мінімізації, ми можемо ввести допоміжну змінну  $p_i$ , щоб замінити  $\max_{j \in J_i} |\hat{a}_{ij} x_j|$  та отримати наступний еквівалентну формулу:

$$\min_z \left\{ \Gamma \max_{j \in J_i} |z_{ij}| : z_i = \hat{a}_i x \right\} = \Gamma p_i, p_i \geq \hat{a}_{ij} |x_j|, \forall j \in J_i.$$

При включенні вищезазначеної конічної двоїстої задачі у робастний аналог, отримуємо

$$\begin{cases} \sum_j a_{ij} x_j + \Gamma p_i \leq b_i \\ p_i \geq \hat{a}_{ij} |x_j|, \forall j \in J_i \end{cases}$$

**Зауваження 2.** Еквівалентна робастна формула для (2.8) може бути отримана шляхом заміни абсолютного значення терміну  $|x_j|$  з допоміжною змінною  $u_j$  та обмеженням  $-u_j \leq x_j \leq u_j$  наступним чином:

$$\begin{cases} \sum_j a_{ij} x_j + \Gamma p_i \leq b_i \\ p_i \geq \hat{a}_{ij} u_j, \forall j \in J_i \\ -u_j \leq x_j \leq u_j, \forall j \in J_i \end{cases} \quad (2.8)$$

### РОЗДІЛ 3. Імовірнісні гарантії робастної оптимізації

#### Лема 3.1

Для кожного робастного аналога (2.2), (2.5), (2.7), якщо він задовольняється, маємо наступне співвідношення, яке представляє верхню межу ймовірності порушення початкового обмеження:

$$\Pr \left\{ \sum_j a_{ij} x_j + \sum_{j \in J_i} \xi_j \hat{a}_{ij} x_j > b_i \right\} \leq \Pr \left\{ \sum_{j \in J_i} \xi_j \delta_j > \Delta \right\} \quad (3.1)$$

де параметри  $\Delta$  і  $\delta$  визначаються наступним чином:

1. Для коробчастого набору невизначеності (2.2):

$$\Delta = \Psi, -1 \leq \delta_j \leq 1, \forall j \in J_i, \sum_{j \in J_i} \delta_j \leq 1 \quad (3.2 \text{ a})$$

2. Для еліпсоїдального набору невизначеності (2.5):

$$\Delta = \Omega, -1 \leq \delta_j \leq 1, \forall j \in J_i, \sum_{j \in J_i} \delta_j^2 = 1 \quad (3.2 \text{ b})$$

3. Для поліедрального набору невизначеності (2.7):

$$\Delta = \Gamma, -1 \leq \delta_j \leq 1, \forall j \in J_i. \quad (3.2 \text{ c})$$

#### *Доведення леми 3.1:*

1. Для встановлення коробчастого набору невизначеності (2.2), виконується наступне співвідношення:

$$\begin{aligned} & \Pr \left\{ \sum_j a_{ij} x_j + \sum_{j \in J_i} \xi_j \hat{a}_{ij} x_j > b_i \right\} \\ & \stackrel{(1)}{=} \Pr \left\{ \left( \sum_j a_{ij} x_j + \Psi \sum_{j \in J_i} \hat{a}_{ij} |x_j| - b_i \right) + \sum_{j \in J_i} \xi_j \hat{a}_{ij} x_j > \Psi \sum_{j \in J_i} \hat{a}_{ij} |x_j| \right\} \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(2) \quad & \leq \Pr \left\{ \sum_{j \in J_i} \xi_j \hat{a}_{ij} x_j > \Psi \sum_{j \in J_i} \hat{a}_{ij} |x_j| \right\} = \Pr \left\{ \frac{\sum_{j \in J_i} \xi_j \hat{a}_{ij} x_j}{\sum_{j \in J_i} \hat{a}_{ij} |x_j|} > \Psi \right\} \\
& = \Pr \left\{ \sum_{j \in J_i} \alpha_j \xi_j > \Psi \right\},
\end{aligned}$$

$$\text{де } \alpha_j = \frac{\hat{a}_{ij} x_j}{\sum_{j \in J_i} \hat{a}_{ij} |x_j|}.$$

Слід зауважити, що, оскільки  $\alpha_j$  є більш точним позначенням, для простоти подання, ми опускаємо індекс  $i$  звідти. Таким чином, ми маємо  $-1 \leq a_j \leq 1, \forall j \in J_i$ , та  $\sum_{j \in J_i} a_j \leq 1$ .

У вищезгаданому випадку рівність (1) отримується шляхом додавання  $\Psi \sum_{j \in J_i} \hat{a}_{ij} |x_j|$  з двох сторін самого обмеження та переходу  $b_i$  до лівосторонньої невизначеності; нерівність (2) ґрунтується на коробчастому наборі невизначеності, що представляє робастний аналог (2.2).

2. Для еліпсоїдального набору невизначеності (2.5) слідуємо наступному співвідношенню:

$$\begin{aligned}
& \Pr \left\{ \sum_j a_{ij} x_j + \sum_{j \in J_i} \xi_j \hat{a}_{ij} x_j > b_i \right\} \\
(1) \quad & = \Pr \left\{ \left( \sum_j a_{ij} x_j + \Omega \sqrt{\sum_{j \in J_i} \hat{a}_{ij}^2 x_j^2} - b_i \right) + \sum_{j \in J_i} \xi_j \hat{a}_{ij} x_j > \Omega \sqrt{\sum_{j \in J_i} \hat{a}_{ij}^2 x_j^2} \right\} \leq
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& \stackrel{(2)}{\leq} \Pr \left\{ \sum_{j \in J_i} \xi_j \hat{a}_{ij} x_j > \Omega \sqrt{\sum_{j \in J_i} \hat{a}_{ij}^2 x_j^2} \right\} = \Pr \left\{ \frac{\sum_{j \in J_i} \xi_j \hat{a}_{ij} x_j}{\sqrt{\sum_{j \in J_i} \hat{a}_{ij}^2 x_j^2}} > \Omega \right\} \\
& = \Pr \left\{ \sum_{j \in J_i} \xi_j \beta_j > \Omega \right\},
\end{aligned}$$

$$\text{де } \beta_j = \frac{\hat{a}_{ij} x_j}{\sqrt{\sum_{j \in J_i} \hat{a}_{ij}^2 x_j^2}}.$$

Таким чином, ми маємо  $-1 \leq \beta_j \leq 1, \forall j \in J_i$ , і  $\sum_{j \in J_i} \beta_j^2 = 1$ .

У вищезгаданому випадку рівність (1) отримується шляхом додавання  $\Omega \sqrt{\sum_{j \in J_i} \hat{a}_{ij}^2 x_j^2}$  з двох сторін самого обмеження; нерівність (2) базується на еліпсоїдальному наборі невизначеності, представленому робастним аналогом (2.5).

3. Для поліедрального набору невизначеності (2.7) слідуюмо наступному співвідношенню:

$$\begin{aligned}
& \Pr \left\{ \sum_j a_{ij} x_j + \sum_{j \in J_i} \xi_j \hat{a}_{ij} x_j > b_i \right\} = \Pr \left\{ \sum_{j \in J_i} \xi_j \hat{a}_{ij} x_j > b_i - \sum_j a_{ij} x_j \right\} \leq \\
& \stackrel{(1)}{\leq} \Pr \left\{ \sum_{j \in J_i} \xi_j \hat{a}_{ij} x_j > z_i \Gamma \right\} \stackrel{(2)}{\leq} \Pr \left\{ \sum_{j \in J_i} \xi_j \hat{a}_{ij} x_j > \Gamma \max_{j \in J_i} \hat{a}_{ij} |x_j| \right\} = \\
& = \Pr \left\{ \frac{\sum_{j \in J_i} \xi_j \hat{a}_{ij} x_j}{\max_{j \in J_i} \hat{a}_{ij} |x_j|} > \Gamma \right\} = \Pr \left\{ \sum_{j \in J_i} \xi_j \gamma_j > \Gamma \right\}
\end{aligned}$$

$$\text{де } \gamma_j = \frac{\hat{a}_{ij} x_j}{\max_{j \in J_i} \hat{a}_{ij} |x_j|}.$$

Таким чином, ми маємо  $-1 \leq \gamma_j \leq 1, \forall j \in J_i$ .

Нерівність (1) у вищезгаданому випадку базується на першому обмеженні відповідних робастних обмежень (2.7), нерівність (2) базується на другому обмеженні (2.7)

### **Лема 3.2**

Якщо  $\{\xi_j\}_{j \in J_i}$  є незалежним і підлягає симетричному розподілу імовірності, тоді наступна ймовірність порушення обмеження виконується для будь-якого  $\theta > 0$

$$\Pr \left\{ \sum_j a_{ij} x_j + \sum_{j \in J_i} \xi_j \hat{a}_{ij} x_j > b_i \right\} \leq e^{-\theta \Delta} \prod_{j \in J_i} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\theta \xi_j \delta_j)^{2k}}{(2k)!} dF_{\xi_j}(\xi) \right\} \quad (3.3)$$

де  $\Delta$  і  $\delta_j$  детально описані в лемі 3.1.

### ***Доведення лем 3.2:***

Слідуючи результату лем 3.1 (тобто, нерівності (3.1)), отримуємо наступні співвідношення для робастної задачі оптимізації (2.2, 2.5, 2.7):

$$\begin{aligned} \Pr \left\{ \sum_j a_{ij} x_j + \sum_{j \in J_i} \xi_j \hat{a}_{ij} x_j > b_i \right\} &\leq \Pr \left\{ \sum_{j \in J_i} \xi_j \delta_j > \Delta \right\} \stackrel{(1)}{\leq} \Pr \left\{ \sum_{j \in J_i} \xi_j \delta_j \geq \Delta \right\} \\ &\stackrel{(2)}{=} \Pr \left\{ \theta \sum_{j \in J_i} \xi_j \delta_j \geq \theta \Delta \right\} \stackrel{(3)}{\leq} e^{-\theta \Delta} E \left\{ e^{\theta \sum_{j \in J_i} \xi_j \delta_j} \right\} \stackrel{(4)}{=} e^{-\theta \Delta} \prod_{j \in J_i} E \left\{ e^{\theta \xi_j \delta_j} \right\} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \stackrel{(5)}{=} e^{-\theta\Delta} \prod_{j \in J_i} E \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\theta \xi_j \delta_j)^k}{(k)!} \right\} = e^{-\theta\Delta} \prod_{j \in J_i} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\theta \xi_j \delta_j)^k}{(k)!} dF_{\xi_j}(\xi) \right\} \\
& \stackrel{(6)}{=} e^{-\theta\Delta} \prod_{j \in J_i} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\theta \xi_j \delta_j)^{2k}}{(2k)!} dF_{\xi_j}(\xi) \right\} \\
& + e^{-\theta\Delta} \prod_{j \in J_i} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\theta \xi_j \delta_j)^{2k+1}}{(2k+1)!} dF_{\xi_j}(\xi) \right\} \\
& \stackrel{(7)}{=} e^{-\theta\Delta} \prod_{j \in J_i} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\theta \xi_j \delta_j)^{2k}}{(2k)!} dF_{\xi_j}(\xi) \right\}
\end{aligned}$$

Слід зазначити, що у вищезгаданому випадку нерівність (1) використовує пряму реалізацію строгої нерівності; рівність (2) використовує  $\theta > 0$ ; нерівність (3) використовує нерівність Маркова; рівність (4) використовує стан незалежності; рівність (5) використовує ряд Маклорена; рівність (6) відокремлює члени з непарними степенями і навіть значенням  $k$ ; рівність (7) використовує симетричний розподіл.

### **Лема 3.3**

Якщо  $\{\xi_j\}_{j \in J_i}$  є незалежними і за умови обмеженого та симетричного розподілу ймовірностей на  $[-1,1]$ , то для збіжності  $\theta > 0$  виконується наступне:

$$\Pr \left\{ \sum_j a_{ij} x_j + \sum_{j \in J_i} \xi_j \hat{a}_{ij} x_j > b_i \right\} \leq \exp \left( \min_{\theta > 0} \left\{ -\theta\Delta + \sum_{j \in J_i} \frac{\theta^2 \delta_j^2}{2} \right\} \right) \quad (3.4),$$

де  $\Delta$  і  $\delta_j$  детально описані в лемі 3.1.

### Доведення лєми 3.3:

Починаючи від висновку з лєми 3.2 (тобто, нерівності (3.3)), ми маємо

$$\begin{aligned}
 \Pr \left\{ \sum_j a_{ij} x_j + \sum_{j \in J_i} \xi_j \hat{a}_{ij} x_j > b_i \right\} &\leq e^{-\theta \Delta} \prod_{j \in J_i} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\theta \xi_j \delta_j)^{2k}}{(2k)!} dF_{\xi_j}(\xi) \right\} = \\
 &= e^{-\theta \Delta} \prod_{j \in J_i} \left\{ \int_{-1}^1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\theta \xi_j \delta_j)^{2k}}{(2k)!} dF_{\xi_j}(\xi) \right\} = \\
 &= e^{-\theta \Delta} \prod_{j \in J_i} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\theta \delta_j)^{2k}}{(2k)!} \int_{-1}^1 \xi_j^{2k} dF_{\xi_j}(\xi) \right\} \leq \\
 &\stackrel{(1)}{\leq} e^{-\theta \Delta} \prod_{j \in J_i} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\theta \delta_j)^{2k}}{(2k)!} \int_{-1}^1 1 dF_{\xi_j}(\xi) \right\} = e^{-\theta \Delta} \prod_{j \in J_i} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\theta \delta_j)^{2k}}{(2k)!} \right\} \leq \\
 &\stackrel{(2)}{\leq} e^{-\theta \Delta} \prod_{j \in J_i} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\theta \delta_j)^{2k}}{2^k k!} \right\} = e^{-\theta \Delta} \prod_{j \in J_i} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\theta^2 \delta_j^2 / 2)^k}{k!} \right\} = \\
 &= e^{-\theta \Delta} \prod_{j \in J_i} \left\{ e^{\theta^2 \delta_j^2 / 2} \right\} = \exp \left\{ -\theta \Delta + \sum_{j \in J_i} \frac{\theta^2 \delta_j^2}{2} \right\}
 \end{aligned}$$

У вищезгаданому, нерівність (1) використовує умови  $[-1, 1]$ ; нерівність (2) використовує факт  $(2k)! > 2^k k!$ . Нарешті, щоб отримати найкращу (найменшу) верхню межу, вибравши значення  $\theta$ , ми можемо вирішити зв'язок щодо  $\theta$  і отримати найкращу верхню межу, тобто

$$\Pr \left\{ \sum_j a_{ij} x_j + \sum_{j \in J_i} \xi_j \hat{a}_{ij} x_j > b_i \right\} \leq \exp \left( \min_{\theta > 0} \left\{ -\theta \Delta + \sum_{j \in J_i} \frac{\theta^2 \delta_j^2}{2} \right\} \right).$$

### **Теорема 3.1**

Припустимо, що  $\{\xi_j\}_{j \in J_i}$  незалежна і відповідає умовам обмеженого і симетричного розподілу ймовірностей, на  $[-1,1]$ , тоді  
1) для всіх трьох робастних аналогів (2.2, 2.5, 2.7) ми маємо

$$\Pr \left\{ \sum_j a_{ij} x_j + \sum_{j \in J_i} \xi_j \hat{a}_{ij} x_j > b_i \right\} \leq \exp \left( -\frac{\Delta^2}{2|J_i|} \right). \quad (3.5)$$

2) для коробчастого, еліпсоїдального наборів невизначеностей, ми маємо

$$\Pr \left\{ \sum_j a_{ij} x_j + \sum_{j \in J_i} \xi_j \hat{a}_{ij} x_j > b_i \right\} \leq \exp \left( -\frac{\Delta^2}{2} \right). \quad (3.6)$$

де  $\Delta$  є регульованим параметром для різних наборів невизначеностей, наведених у лемі 3.1.

#### ***Доведення теореми 3.1:***

1) На підставі лемі 3.1, для коробчастого, еліпсоїдального, поліедрального наборів невизначеностей, ми маємо  $|\delta_j| \leq 1, \forall j \in J_i$  тобто

$\sum_{j \in J_i} \frac{1}{\delta_j^2} \geq |J_i|$  і наступне співвідношення виглядатиме так:

$$\begin{aligned} \min_{\theta > 0} \left\{ -\theta \Delta + \sum_{j \in J_i} \frac{\theta^2 \delta_j^2}{2} \right\} &= \min_{\theta > 0} \left\{ \frac{\delta_j^2}{2} \sum_{j \in J_i} \left( \theta^2 - \frac{2\Delta}{|J_i| \delta_j^2} \theta \right) \right\} = \\ &= -\frac{\Delta^2}{2|J_i|^2} \sum_{j \in J_i} \frac{1}{\delta_j^2} \leq -\frac{\Delta^2}{2|J_i|} \end{aligned}$$

Використовуючи висновок з лемі 3.3, ми отримуємо

$$\Pr \left\{ \sum_j a_{ij} x_j + \sum_{j \in J_i} \xi_j \hat{a}_{ij} x_j > b_i \right\} \leq \exp \left( \min_{\theta > 0} \left\{ -\theta \Delta + \sum_{j \in J_i} \frac{\theta^2 \delta_j^2}{2} \right\} \right) \leq \exp \left( -\frac{\Delta^2}{2|J_i|} \right).$$

2) Для коробчастого, еліпсоїдального наборів невизначеностей, ми маємо

$$|\delta_j| \leq 1, \forall j \in J_i \text{ та } \sum_{j \in J_i} \delta_j^2 \leq 1,$$

таким чином, наступне співвідношення виглядатиме так:

$$\min_{\theta > 0} \left\{ -\theta \Delta + \sum_{j \in J_i} \frac{\theta^2 \delta_j^2}{2} \right\} \leq \min_{\theta > 0} \left\{ -\theta \Delta + \frac{\theta^2}{2} \right\} = -\frac{\Delta^2}{2}.$$

Аналогічно, використовуючи висновок з леми 3.3, ми маємо

$$\Pr \left\{ \sum_j a_{ij} x_j + \sum_{j \in J_i} \xi_j \hat{a}_{ij} x_j > b_i \right\} \leq \exp \left( \min_{\theta > 0} \left\{ -\theta \Delta + \sum_{j \in J_i} \frac{\theta^2 \delta_j^2}{2} \right\} \right) \leq \exp \left( -\frac{\Delta^2}{2} \right).$$

З наведеним вище аналізом ми отримуємо межі ймовірності, наведені в (3.5) та (3.6).

### **Теорема 3.2**

Якщо  $\{\xi_j\}_{j \in J_i}$  незалежна і відповідає умовам симетричного розподілу

ймовірностей, то ми маємо

$$\Pr \left\{ \sum_j a_{ij} x_j + \sum_{j \in J_i} \xi_j \hat{a}_{ij} x_j > b_i \right\} \leq \exp \left( \min_{\theta > 0} \left\{ -\theta \Delta + \sum_{j \in J_i} \ln E \left[ e^{\theta \xi_j} \right] \right\} \right) \quad (3.7)$$

де  $\Delta$  являє собою регульований параметр для різних наборів невизначеностей, як детально описано в лемі 3.1.

### ***Доведення теореми 3.2:***

Якщо невизначеності є незалежними та підлягають симетричному розподілу ймовірності, то, скориставшись інформацією про розподіл

ймовірності і починаючи з висновку в лемі 3.2, ми маємо

$$\begin{aligned}
\Pr \left\{ \sum_j a_{ij} x_j + \sum_{j \in J_i} \xi_j \hat{a}_{ij} x_j > b_i \right\} &\leq e^{-\theta \Delta} \prod_{j \in J_i} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\theta \xi_j \delta_j)^{2k}}{(2k)!} dF_{\xi_j}(\xi) \right\} = \\
&= e^{-\theta \Delta} \prod_{j \in J_i} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\theta \xi_j)^{2k} \delta_j^{2k}}{(2k)!} dF_{\xi_j}(\xi) \right\} \leq \\
&\stackrel{(1)}{\leq} e^{-\theta \Delta} \prod_{j \in J_i} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\theta \xi_j)^{2k}}{(2k)!} dF_{\xi_j}(\xi) \right\} = \\
&\stackrel{(2)}{=} e^{-\theta \Delta} \prod_{j \in J_i} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\theta \xi_j)^k}{k!} dF_{\xi_j}(\xi) \right\} = e^{-\theta \Delta} \prod_{j \in J_i} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} e^{\theta \xi_j} dF_{\xi_j}(\xi) \right\} = \\
&= e^{-\theta \Delta} \prod_{j \in J_i} E \left[ e^{\theta \xi_j} \right] = \exp \left\{ -\theta \Delta + \sum_{j \in J_i} \ln E \left[ e^{\theta \xi_j} \right] \right\}
\end{aligned}$$

Слід зазначити, що в вищезгаданому,  $\theta$  є додатним числом, нерівність (1) використовує  $|\delta_j| \leq 1$ ; рівність (2) використовує симетричний розподіл. Нарешті, ми отримаємо найкращу верхню межу, вибравши оптимальне значення  $\theta$ :

$$\Pr \left\{ \sum_j a_{ij} x_j + \sum_{j \in J_i} \xi_j \hat{a}_{ij} x_j > b_i \right\} \leq \exp \left( \min_{\theta > 0} \left\{ -\theta \Delta + \sum_{j \in J_i} \ln E \left[ e^{\theta \xi_j} \right] \right\} \right)$$

### **Теорема 3.3**

Якщо невизначені параметри  $\{\xi_j\}_{j \in J_i}$  є незалежними і підлягають обмеженому розподілу ймовірності, що підтримуються на  $[-1, 1]$ , а надійним рішенням аналога  $X^*$  з  $d_i(X^*) > 0$ ,

де  $d_i(x) \stackrel{\Delta}{=} b_i - \sum_j \hat{a}_{ij} x_j - E \left[ \sum_{j \in J_i} \xi_j \hat{a}_{ij} x_j \right]$ , то ми маємо:

$$\Pr \left\{ \sum_j a_{ij} x_j^* + \sum_{j \in J_i} \xi_j \hat{a}_{ij} x_j^* > b_i \right\} \leq \exp \left( - \frac{d_i(x^*)^2}{\sum_{j \in J_i} 2 \hat{a}_{ij}^2 x_j^{*2}} \right) \quad (3.8)$$

**Доведення теореми 3.3:**

$$\begin{aligned} \Pr \left\{ \sum_j a_{ij} x_j^* + \sum_{j \in J_i} \xi_j \hat{a}_{ij} x_j^* > b_i \right\} &\stackrel{(1)}{\leq} \Pr \left\{ \sum_j a_{ij} x_j^* + \sum_{j \in J_i} \xi_j \hat{a}_{ij} x_j^* \geq b_i \right\} = \\ &\stackrel{(2)}{=} \Pr \left[ \left( \sum_j a_{ij} x_j^* + \sum_{j \in J_i} \xi_j \hat{a}_{ij} x_j^* - b_i \right) - (-d_i(x^*)) \geq d_i(x^*) \right] = \\ &\stackrel{(3)}{=} \Pr \left[ \left( \sum_j a_{ij} x_j^* + \sum_{j \in J_i} \xi_j \hat{a}_{ij} x_j^* - b_i \right) - \left( \sum_j a_{ij} x_j + E \left[ \sum_{j \in J_i} \xi_j \hat{a}_{ij} x_j \right] - b_i \right) \geq d_i(x^*) \right] \leq \\ &\stackrel{(4)}{=} \exp \left( - \frac{2d_i(x^*)^2}{\sum_{j \in J_i} (2\hat{a}_{ij} x_j^*)^2} \right) = \exp \left( - \frac{d_i(x^*)^2}{\sum_{j \in J_i} 2\hat{a}_{ij}^2 x_j^{*2}} \right). \end{aligned}$$

У вищезгаданому нерівність (1) базується строгій нерівності; рівність (2)  $d_i(X^*)$  базується на додаванні з обох сторін обмеження; рівність (3) базується на визначенні  $d_i(X^*)$ , а нерівність (4) ґрунтується на нерівності Хоффдінга (Hoeffding).

### **Теорема 3.4**

Якщо невизначені параметри  $\{\xi_j\}_{j \in J_i}$  незалежні, а надійним рішенням

для аналога  $\in X^*$ , то для будь-якого  $\theta > 0$  ми маємо:



$$\begin{aligned}
& \Pr \left\{ \sum_j a_{ij} x_j + \sum_{j \in J_i} \xi_j \hat{a}_{ij} x_j > b_i \right\} \leq \\
& \leq \exp \left( \min_{\theta > 0} \left\{ -\theta(b_i - \sum_j a_{ij} x_j^*) + \sum_{j \in J_i} \ln E \left[ e^{\theta \xi_j \hat{a}_{ij} x_j^*} \right] \right\} \right)
\end{aligned} \tag{3.9}$$

**Доведення теореми 3.4:**

$$\begin{aligned}
& \Pr \left\{ \sum_j a_{ij} x_j + \sum_{j \in J_i} \xi_j \hat{a}_{ij} x_j < b_i \right\} \stackrel{(1)}{\leq} \Pr \left\{ \sum_j a_{ij} x_j + \sum_{j \in J_i} \xi_j \hat{a}_{ij} x_j \geq b_i \right\} = \\
& = \Pr \left\{ \sum_{j \in J_i} \xi_j \hat{a}_{ij} x_j \geq b_i - \sum_j a_{ij} x_j \right\} = \Pr \left\{ \theta \sum_{j \in J_i} \xi_j \hat{a}_{ij} x_j \geq \theta(b_i - \sum_j a_{ij} x_j) \right\} \leq \\
& \stackrel{(2)}{\leq} \exp \left( -\theta(b_i - \sum_j a_{ij} x_j) \right) E \left[ \exp \left( \theta \sum_{j \in J_i} \xi_j \hat{a}_{ij} x_j \right) \right] \\
& = \exp \left( -\theta(b_i - \sum_j a_{ij} x_j) \right) \prod_{j \in J_i} E \left[ e^{\theta \xi_j \hat{a}_{ij} x_j} \right] = \\
& = \exp \left( -\theta(b_i - \sum_j a_{ij} x_j) \right) + \sum_{j \in J_i} \ln E \left[ e^{\theta \xi_j \hat{a}_{ij} x_j} \right]
\end{aligned}$$

У вищезгаданому  $\theta$  є позитивним числом, нерівність (1) базується на прямій релаксації строгої нерівності, а нерівність (2) базується на нерівності Маркова. Нарешті, отримана оцінка імовірності отримується шляхом вибору оптимального значення  $\theta$ ,

$$\Pr \left\{ \sum_j a_{ij} x_j^* + \sum_{j \in J_i} \xi_j \hat{a}_{ij} x_j^* > b_i \right\} \leq \exp \left( \min_{\theta > 0} \left\{ -\theta(b_i - \sum_j a_{ij} x_j^*) + \sum_{j \in J_i} \ln E \left[ e^{\theta \xi_j \hat{a}_{ij} x_j^*} \right] \right\} \right)$$

## РОЗДІЛ 4. Оптимізація доходу малого підприємства

### 4.1. Побудова математичної моделі підприємства у вигляді задачі лінійного програмування.

Побудуємо лінійну модель максимізації доходу малого ІТ підприємства. Для цього складемо технологічну таблицю (табл.1).

Таблиця 1.

Технологічний варіант	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9	x10	x11	x12	запас ресурсу	Вартість за годину	робочих днів в 2018р.		робочих годин в 2018р.		З/П
															250	1993			
Ресурс 1	80	48	0	88	0	0	0	16	40	100	200	8	1993	4,7619					Ресурс 1 800
Ресурс 2	48	0	84	0	40	168	32	20	0	100	0	0	1993	5,9524					Ресурс 2 1000
Ресурс 3	0	40	88	0	0	0	0	0	200	0	480	0	1993	7,1429					Ресурс 3 1200
Ресурс 4	36	0	0	84	80	0	200	0	0	496	0	0	1993	8,9286					Ресурс 4 1500
Ресурс 5	0	40	0	80	0	400	0	168	0	0	0	0	1993	8,9286					Ресурс 5 1500
Ресурс 6	0	48	80	0	0	240	0	0	0	488	0	0	1993	7,1429					Ресурс 6 1200
Ресурс 7	0	0	0	88	0	0	0	80	280	420	0	0	1993	9,5238					Ресурс 7 1600
Ресурс 8	56	0	0	0	80	460	240	0	0	0	0	80	1993	10,714					Ресурс 8 1800
Ресурс 9	0	0	0	0	120	320	0	0	200	0	400	160	1993	11,905					Ресурс 9 2000
Ресурс 10	0	0	60	0	200	0	0	280	0	280	0	0	1993	17,857					Ресурс 10 3000
Собівартість 1(з/п)	1588	1214	2771	2721	6810	13310	6262	7457	6667	14500	12629	2800							
Собівартість 2 (ресурси)	555,8	425	970	952,5	2383	4658	2192	2610	2333	5075	4420	980							
Вартість(обсяг)	2800	2500	5600	5500	13800	27000	12700	15100	13500	29400	25600	0							
Попит	від 15 до 30			від 10 до 25															

Припускається, що основним ресурсом такого підприємства є персонал, тому основним ресурсним обмеженням буде робочий час працівників. Для побудови моделі вважаємо, що кількість працівників підприємства дорівнює 10. На основі вимог, визначених в КЗпП, норма тривалості робочого часу на 2018 рік становить 1993 години. Керуючими змінними моделі -  $x_j, j = \overline{1,12}$  вважаємо типи проектів, замовлення на які може отримати підприємство. Матриця обмежень  $A = (a_{ij})$ , де  $a_{ij}$  - час на виконання  $i$ -им працівником  $j$ -го завдання. Додатково накладаються певні умови, пов'язані з попередніми замовленнями і маркетинговими дослідженнями ринку. Цільовою функцією задачі є дохід підприємства в умовних грошових одиницях. На основі складеної технологічної таблиці будуємо детерміновану лінійну модель задачі:

$$F(X) = 2800x_1 + 2500x_2 + 5600x_3 + 5500x_4 + 13800x_5 + 27000x_6 + 12700x_7 + \\ + 15100x_8 + 13500x_9 + 29400x_{10} + 25600x_{11} \rightarrow \max$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 80x_1 + 48x_2 + 88x_4 + 16x_8 + 40x_9 + 100x_{10} + 200x_{11} + 8x_{12} \leq 1993; \\ 48x_1 + 84x_3 + 40x_5 + 168x_6 + 32x_7 + 20x_8 + 100x_{10} \leq 1993; \\ 40x_2 + 88x_3 + 200x_9 + 480x_{11} \leq 1993; \\ 36x_1 + 84x_4 + 80x_5 + 200x_7 + 496x_{10} \leq 1993; \\ 40x_2 + 80x_4 + 400x_6 + 168x_8 \leq 1993; \\ 48x_2 + 80x_3 + 240x_7 + 488x_{11} \leq 1993; \\ 88x_4 + 80x_8 + 280x_9 + 420x_{10} \leq 1993; \\ 56x_1 + 80x_5 + 460x_6 + 240x_7 + 80x_{12} \leq 1993; \\ 120x_5 + 320x_6 + 200x_9 + 400x_{11} + 160x_{12} \leq 1993; \\ 60x_3 + 200x_5 + 280x_8 + 280x_{10} \leq 1993; \\ x_{12} \geq 0,05(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} + x_{11}); \\ x_{12} \leq 0,1(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} + x_{11}); \end{array} \right. \quad (4.1)$$

$$x_j \geq 0, j = \overline{1,12}.$$

#### 4.2. Розв'язання задачі робастної оптимізації для різних областей невизначеності збурених даних

Припускаємо, що коефіцієнти в перших десяти нерівностях лівих частин системи обмежень (4.1) можуть мати збурення відносно детермінованих початкових значень.

Використовуючи формулу (1.6) і систему (4.1), одержимо систему обмежень задачі для прямокутного представлення:

$$\begin{aligned} & 80x_1 + 48x_2 + 88x_4 + 16x_8 + 40x_9 + 100x_{10} + 200x_{11} + 8x_{12} + \\ & + \psi(8x_1 + 4.8x_2 + 8.8x_4 + 1.6x_8 + 4x_9 + 10x_{10} + 20x_{11} + 0.8x_{12}) \leq 1993; \\ & 48x_1 + 84x_3 + 40x_5 + 168x_6 + 32x_7 + 20x_8 + 100x_{10} + \\ & + \psi(4.8x_1 + 8.4x_3 + 4x_5 + 16.8x_6 + 3.2x_7 + 2x_8 + 10x_{10}) \leq 1993; \\ & 40x_2 + 88x_3 + 200x_9 + 480x_{11} + \psi(4x_2 + 8.8x_3 + 20x_9 + 48x_{11}) \leq 1993; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 36x_1 + 84x_4 + 80x_5 + 200x_7 + 496x_{10} + \\
& + \psi(3.6x_1 + 8.4x_4 + 8x_5 + 20x_7 + 49.6x_{10}) \leq 1993; \\
& 40x_2 + 80x_4 + 400x_6 + 168x_8 + \psi(4x_2 + 8x_4 + 40x_6 + 16.8x_8) \leq 1993; \\
& 48x_2 + 80x_3 + 240x_7 + 488x_{11} + \psi(4.8x_2 + 8x_3 + 24x_7 + 48.8x_{11}) \leq 1993; \\
& 88x_4 + 80x_8 + 280x_9 + 420x_{10} + \psi(8.8x_4 + 8x_8 + 28x_9 + 42x_{10}) \leq 1993; \\
& 56x_1 + 80x_5 + 460x_6 + 240x_7 + 80x_{12} + \\
& + \psi(5.6x_1 + 8x_5 + 46x_6 + 24x_7 + 8x_{12}) \leq 1993; \\
& 120x_5 + 320x_6 + 200x_9 + 400x_{11} + 160x_{12} + \\
& + \psi(12x_5 + 32x_6 + 20x_9 + 40x_{11} + 16x_{12}) \leq 1993; \\
& 60x_3 + 200x_5 + 280x_8 + 280x_{10} + \psi(6x_3 + 20x_5 + 28x_8 + 28x_{10}) \leq 1993; \\
& 15 \leq x_1 + x_2 \leq 30; \\
& 10 \leq x_4 + x_5 \leq 25; \\
& x_{12} \geq 0.05(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} + x_{11}); \\
& x_{12} \leq 0.1(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} + x_{11}); \\
& x_j \geq 0, j = 1, 12.
\end{aligned}$$

Для еліпсоїдального випадку з формул (1.7) і (4.1) система обмежень задачі набуде вигляду:

$$\begin{aligned}
& 80x_1 + 48x_2 + 88x_4 + 16x_8 + 40x_9 + 100x_{10} + 200x_{11} + 8x_{12} + \\
& + \Omega\sqrt{(8x_1)^2 + (4.8x_2)^2 + (8.8x_4)^2 + (1.6x_8)^2 + (4x_9)^2 + (10x_{10})^2 + (20x_{11})^2 + (0.8x_{12})^2} \leq 1993; \\
& 48x_1 + 84x_3 + 40x_5 + 168x_6 + 32x_7 + 20x_8 + 100x_{10} + \\
& + \Omega\sqrt{(4.8x_1)^2 + (8.4x_3)^2 + (4x_5)^2 + (16.8x_6)^2 + (3.2x_7)^2 + (2x_8)^2 + (10x_{10})^2} \leq 1993; \\
& 40x_2 + 88x_3 + 200x_9 + 480x_{11} + \Omega\sqrt{(4x_2)^2 + (8.8x_3)^2 + (20x_9)^2 + (48x_{11})^2} \leq 1993; \\
& 36x_1 + 84x_4 + 80x_5 + 200x_7 + 496x_{10} + \\
& + \Omega\sqrt{(3.6x_1)^2 + (8.4x_4)^2 + (8x_5)^2 + (20x_7)^2 + (49.6x_{10})^2} \leq 1993; \\
& 40x_2 + 80x_4 + 400x_6 + 168x_8 + \Omega\sqrt{(4x_2)^2 + (8x_4)^2 + (40x_6)^2 + (16.8x_8)^2} \leq 1993; \\
& 48x_2 + 80x_3 + 240x_7 + 488x_{11} + \Omega\sqrt{(4.8x_2)^2 + (8x_3)^2 + (24x_7)^2 + (48.8x_{11})^2} \leq 1993; \\
& 88x_4 + 80x_8 + 280x_9 + 420x_{10} + \Omega\sqrt{(8.8x_4)^2 + (8x_8)^2 + (28x_9)^2 + (42x_{10})^2} \leq 1993;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 56x_1 + 80x_5 + 460x_6 + 240x_7 + 80x_{12} + \\
& + \Omega \sqrt{(5.6x_1)^2 + (8x_5)^2 + (46x_6)^2 + (24x_7)^2 + (8x_{12})^2} \leq 1993; \\
& 120x_5 + 320x_6 + 200x_9 + 400x_{11} + 160x_{12} + \\
& + \Omega \sqrt{(12x_5)^2 + (32x_6)^2 + (20x_9)^2 + (40x_{11})^2 + (16x_{12})^2} \leq 1993; \\
& 60x_3 + 200x_5 + 280x_8 + 280x_{10} + \Omega \sqrt{(6x_3)^2 + (20x_5)^2 + (28x_8)^2 + (28x_{10})^2} \leq 1993; \\
& 15 \leq x_1 + x_2 \leq 30; \\
& 10 \leq x_4 + x_5 \leq 25; \\
& x_{12} \geq 0.05(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} + x_{11}); \\
& x_{12} \leq 0.1(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} + x_{11}); \\
& x_j \geq 0, j = 1, 12.
\end{aligned}$$

Для поліедральної області кількість нерівностей в системі обмежень збільшиться до 66, тому явний вигляд відповідної робастної задачі наводити не будемо. Для чисельної реалізації задачі у випадку такої області невизначеності була складена блочна матриця (додаток 3).

Вважаємо, що параметри матриці обмежень в кожній робастній задачі можуть змінюватись в межах 20% від своїх номінальних значень.

Припускається, що праві частини балансових співвідношень є жорсткими і порушувати їх не можна. Розв'язується низка задач для множин невизначеності різної геометрії з параметрами, що контролюють розмір невизначеності. Отримані числові значення цільової функції для кожного методу розв'язання ( $FB$ ,  $FE$ ,  $FP$  - цільові функції для прямокутного представлення, еліпсоїдальної і поліедральної множин відповідно).

Розв'язки  $x_j$ ,  $j = \overline{1, 12}$  і значення цільової функції для прямокутного представлення, еліпсоїдальної і поліедральної множин наведені в таблицях 2, 3, 4 відповідно.

Порівняння отриманих розв'язків, а саме значення цільових функцій і ступінь їх відхилення від розв'язку відповідної детермінованої задачі наведено в таблиці 5. Значення параметрів  $\Psi = 0$ ,  $\Omega = 0$ ,  $\Gamma = 0$  відповідають

розв'язку початкової детермінованої задачі, а  $\Psi = 2, \Omega = 2, \Gamma = 2$  – 20% збуренню номінальних даних.

Таблиця 2. Прямокутне представлення.

$\Psi$	$FB$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	$x_9$	$x_{10}$	$x_{11}$	$x_{12}$
0	355680	6,39	8,61	8,82	7,46	2,54	1,63	2,10	2,38	2,54	1,03	0,76	2,21
0,2	348550	6,11	8,89	8,63	7,36	2,64	1,57	2,09	2,26	2,55	0,98	0,69	2,19
0,4	341690	5,84	9,16	8,45	7,27	2,73	1,52	2,08	2,15	2,55	0,93	0,62	2,17
0,6	335100	5,58	9,42	8,28	7,18	2,82	1,46	2,07	2,05	2,56	0,88	0,55	2,14
0,8	328740	5,33	9,67	8,11	7,09	2,91	1,41	2,06	1,95	2,56	0,83	0,48	2,12
1	322620	5,09	9,91	7,95	7,01	2,99	1,36	2,06	1,85	2,56	0,78	0,42	2,10
1,2	316710	4,86	10,14	7,80	6,93	3,07	1,31	2,05	1,75	2,57	0,74	0,36	2,08
1,4	311020	4,64	10,36	7,65	6,85	3,15	1,27	2,04	1,66	2,57	0,70	0,31	2,06
1,6	305520	4,42	10,58	7,51	6,78	3,22	1,22	2,03	1,57	2,57	0,66	0,25	2,04
1,8	300200	4,21	10,79	7,37	6,71	3,29	1,18	2,03	1,49	2,58	0,62	0,20	2,02
2	295060	4,01	10,99	7,23	6,64	3,36	1,14	2,02	1,40	2,58	0,58	0,14	2,00

Таблиця 3. Еліпсоїдальна область

$\Omega$	$FE$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	$x_9$	$x_{10}$	$x_{11}$	$x_{12}$
0	355680	6,39	8,61	8,82	7,46	2,54	1,63	2,10	2,38	2,54	1,03	0,76	2,21
0,2	352030	6,25	8,75	8,70	7,40	2,60	1,60	2,09	2,32	2,54	1,01	0,73	2,20
0,4	348460	6,12	8,88	8,59	7,35	2,65	1,58	2,08	2,25	2,53	0,99	0,70	2,19
0,6	344960	5,98	9,02	8,48	7,30	2,70	1,55	2,07	2,19	2,52	0,97	0,67	2,17
0,8	341530	5,85	9,15	8,37	7,25	2,75	1,53	2,06	2,13	2,52	0,94	0,64	2,16
1	338160	5,72	9,28	8,27	7,20	2,80	1,50	2,05	2,07	2,51	0,92	0,61	2,15
1,2	334850	5,60	9,40	8,18	7,15	2,85	1,48	2,04	2,01	2,50	0,90	0,58	2,13
1,4	331590	5,47	9,53	8,08	7,10	2,90	1,46	2,02	1,95	2,50	0,88	0,55	2,12
1,6	328390	5,35	9,65	7,99	7,05	2,95	1,43	2,01	1,89	2,49	0,86	0,52	2,11
1,8	325305	5,23	9,77	7,91	7,01	2,99	1,41	2,00	1,83	2,48	0,84	0,49	2,10
2	322120	5,11	9,89	7,82	6,96	3,04	1,39	1,99	1,77	2,47	0,82	0,46	2,09

Таблиця 4. Поліедральна область

$\Gamma$	$FP$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	$x_9$	$x_{10}$	$x_{11}$	$x_{12}$
0	355680	6,39	8,61	8,82	7,46	2,54	1,63	2,10	2,38	2,54	1,03	0,76	2,21
0,2	353230	6,28	8,72	8,72	7,41	2,59	1,62	2,08	2,33	2,53	1,03	0,74	2,20
0,4	350820	6,18	8,82	8,63	7,37	2,63	1,60	2,06	2,28	2,52	1,02	0,72	2,19
0,6	348470	6,07	8,93	8,54	7,33	2,67	1,59	2,04	2,24	2,51	1,01	0,70	2,18
0,8	346160	5,97	9,03	8,44	7,28	2,72	1,58	2,02	2,19	2,50	1,00	0,69	2,17
1	343910	5,87	9,13	8,35	7,24	2,76	1,56	2,00	2,15	2,49	0,99	0,67	2,16
1,2	341700	5,77	9,23	8,26	7,20	2,80	1,55	1,98	2,11	2,48	0,98	0,65	2,15
1,4	339530	5,64	9,49	8,16	7,13	2,87	1,53	1,97	2,05	2,48	0,98	0,62	2,15
1,6	337350	5,57	9,43	8,10	7,12	2,88	1,52	1,95	2,03	2,46	0,97	0,62	2,13
1,8	335140	5,47	9,53	8,01	7,08	2,92	1,51	1,93	1,98	2,45	0,96	0,60	2,12
2	332940	5,36	9,64	7,93	7,04	2,96	1,50	1,92	1,94	2,44	0,95	0,59	2,11

Таблиця 5. Порівняння отриманих розв'язків

$\Psi$	$FB$	%	$\Omega$	$FE$	%	$\Gamma$	$FP$	%
0	355680	0	0	355680	0	0	355680	0
0,2	348550	2	0,2	352030	1,02	0,2	353230	0,67
0,4	341690	3,93	0,4	348460	2,03	0,4	350820	1,37
0,6	335100	5,78	0,6	344960	3,01	0,6	348470	2,03
0,8	328740	7,56	0,8	341530	3,98	0,8	346160	2,68
1	322620	9,29	1	338160	4,93	1	343910	3,31
1,2	316710	10,95	1,2	334850	5,86	1,2	341700	3,93
1,4	311020	12,56	1,4	331590	6,77	1,4	339530	4,54
1,6	305520	14,1	1,6	328390	7,67	1,6	337350	5,15
1,8	300200	15,6	1,8	325305	8,53	1,8	335140	5,77
2	295060	<b>17,04</b>	2	322120	<b>9,44</b>	2	332940	<b>6,39</b>

За отриманими числовими розв'язками побудовані графіки залежностей значень цільової функції від розміру бюджету невизначеності (рис. 6).

Числові розв'язки задачі отримано з застосуванням системи Matlab, М-файли і програму для випадку еліпсоїдальної множини невизначеності наведено в додатках 1, 2, 3 .

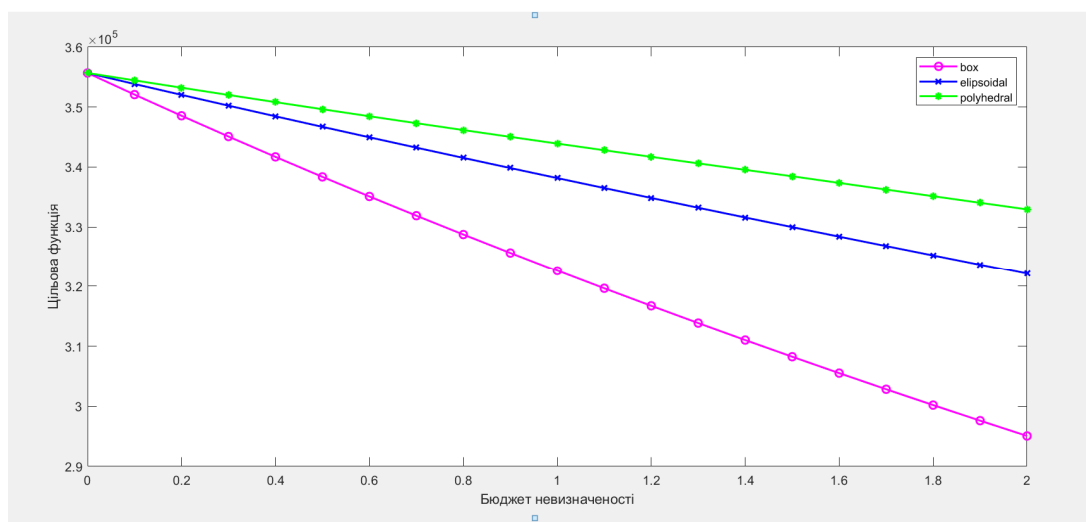


Рис. 6

### 4.3. Розв'язання цілочислової задачі робастної оптимізації

Керуючими змінними задачі є кількість проектів різного типу, що потрібно виконати в поточному році. Якщо виконання робіт не можна переносити на наступний рік, то задачу потрібно розв'язувати як цілочислову, що суттєво ускладнює алгоритм розв'язання.

З використанням програми для вбудованого модуля `intlinprog` в середовищі Matlab розв'язано цілочислову задачу для прямокутної і поліедральної областей невизначеності. Одержані розв'язки і порівняння значень цільової функції наведено і таблицях 6, 7, 8.

Таблиця 6. Прямокутне представлення

$\Psi$	$FB$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	$x_9$	$x_{10}$	$x_{11}$	$x_{12}$
0	335700	6	9	13	8	3	2	1	1	2	1	0	3
0,2	329900	5	10	13	7	3	2	1	1	2	1	0	3
0,4	322500	5	13	9	6	4	1	2	1	3	1	0	3
0,6	316600	4	14	8	6	4	1	2	1	3	1	0	3
0,8	305100	2	16	9	8	5	1	1	0	2	1	0	3
1	299200	1	17	8	8	5	1	1	0	2	1	0	3
1,2	292700	6	9	9	7	3	1	2	2	3	0	0	3
1,4	289400	5	10	6	7	4	1	2	2	3	0	0	2
1,6	282800	0	16	7	7	5	1	1	0	2	1	0	2
1,8	280100	5	10	10	6	4	2	0	0	1	1	0	2
2	277000	1	17	6	6	5	1	1	0	2	1	0	2

Таблиця 7. Поліедральна область

$\Gamma$	$FP$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	$x_9$	$x_{10}$	$x_{11}$	$x_{12}$
0	335700	6	9	13	8	3	2	1	1	2	1	0	3
0,2	335100	4	11	9	10	4	1	3	2	3	0	0	3
0,4	329900	5	10	13	7	3	2	1	1	2	1	0	3
0,6	325300	6	13	9	6	4	1	2	1	3	1	0	3
0,8	325300	6	13	9	6	4	1	2	1	3	1	0	3
1	325300	6	13	9	6	4	1	2	1	3	1	0	3
1,2	319400	5	14	8	6	4	1	2	1	3	1	0	3
1,4	319400	5	14	8	6	4	1	2	1	3	1	0	3
1,6	311600	5	10	8	9	4	1	2	2	3	0	0	3
1,8	311600	5	10	8	9	4	1	2	2	3	0	0	3
2	304300	4	14	7	7	3	1	2	2	2	1	0	3



Таблиця 8. Порівняння розв'язків цілочислової задачі

$\Psi$	$FB$	%	$\Gamma$	$FP$	%
0	335700	0	0	335700	0
0,2	329900	1,73	0,2	335100	0,18
0,4	322500	3,93	0,4	329900	1,73
0,6	316600	5,69	0,6	325300	3,1
0,8	305100	9,12	0,8	325300	3,1
1	299200	10,87	1	325300	3,1
1,2	292700	12,8	1,2	319400	4,86
1,4	289400	13,79	1,4	319400	4,86
1,6	282800	15,76	1,6	311600	7,18
1,8	280100	16,56	1,8	311600	7,18
2	277000	<b>17,48</b>	2	304300	<b>9,35</b>

За числовими результатами побудовано графіки залежностей значень цільової функції від розміру бюджету невизначеності (рис.5). Програми для знаходження розв'язків в середовищі Matlab наведено в додатках 4, 5.

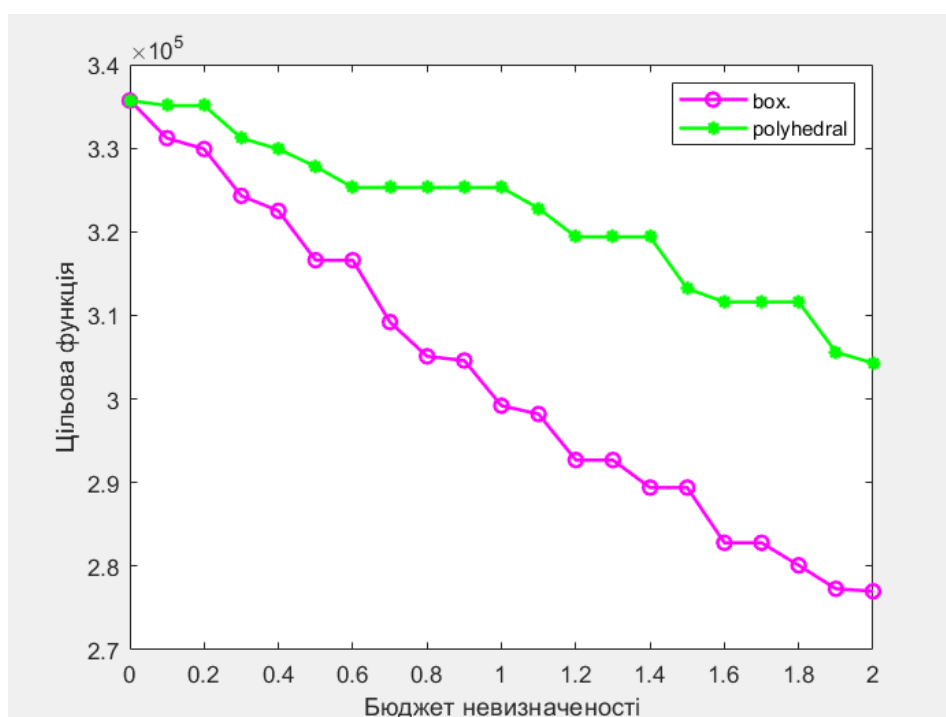


Рис. 7

## **Висновок.**

У магістерській дисертації було розглянуто задачу знаходження економічних показників малого підприємства на основі робастної лінійної моделі. Знайдено розв'язки задачі у припущення, що вхідні параметри задачі мають збурення, закони розподілу ймовірностей яких невідомі. Розглянуто різні типи геометрії областей невизначеності – прямокутну, еліпсоїдальну і поліедральну області. Чисельна реалізація розв'язків виконувалась за допомогою вбудованих модулів `linprog`, `fmincon` та `intlinprog` оптимізаційного блоку середовища Matlab.

Для розглянутої задачі найкращі показники отримали для поліедральної множини невизначеності – відхилення від розв'язку початкової детермінованої задачі не перевищило 6,5%, а для цілочислової задачі – 9,5% при можливих збуреннях даних в межах 20%. Але, хоча робастна задача для такої області звелась до стандартної ЗЛП, кількість змінних збільшилась з 12 до 22, а кількість обмежень – з 16 до 66.

Аналіз розв'язку дозволяє спрогнозувати розвиток підприємства у припущенні, що вхідні параметри задачі можуть мати невизначеності і прийняти ефективне управлінське рішення.

За результатами магістерської дисертації представлена стаття

І.В. Алексєєва, Т.І. Перевознюк. Застосування робастної оптимізації для лінійної моделі функціонування малого підприємства. *Mathematics in Modern Technical University*, 2018, No. 1

## Література

1. Soyster, A.L. (1973). Convex programming with set-inclusive constraints and applications to inexact linear programming. *Operations Research*, 21:1154–1157
2. Ben-Tal, A., Nemirovski, A. (1998). Robust convex optimization. *Mathematics of Operations Research*, 23(4):769–805
3. Ben-Tal, A., Nemirovski, A. (2002). Robust optimization - methodology and applications. *Mathematical Programming*, 92(3):453–480.
4. Горяшко, А. П., Немировский, А. С (2014). Оптимизация стоимости энергии в системах водоснабжения в условиях неопределенности потребления, *Автоматика и телемеханика*, 10:52–72.
5. Bertsimas, D., Sim, M. (2004) The price of robustness. *Operations Research*, 52(1):35–53.
6. Li, Z., Tang, Q. and Floudas, C.A., (2011). A Comparative Theoretical and Computational Study on Robust Counterpart Optimization: I. Robust Linear Optimization and Robust Mixed Integer Linear Optimization. *Industrial & engineering chemistry research*, 50(18):10567-10603.
7. Li, Z., Tang, Q. and Floudas, C.A., (2012). A comparative theoretical and computational study on robust counterpart optimization: II. Probabilistic guarantees on constraint satisfaction. *Industrial & engineering chemistry research*, 51(19):6769-6788.
8. Боднарчук В.С. (2017) Задача багатокритеріальної оптимізації ключових показників математичної моделі діяльності малих підприємств. Дипломна робота. <http://matan.kpi.ua/public/files/2017/dip/Bodnarchuk.pdf>
9. І.В. Алексєєва, Т.І. Перевознюк (2018). Застосування робастної оптимізації для лінійної моделі функціонування малого підприємства. *Mathematics in Modern Technical University*, 2018, No. 1

**Додаток 1. Програма для розв'язання задачі з прямокутним представленням множини невизначеності**

```
%Вох
% Цільова функція
f=[-2800 -2500 -5600 -5500 -13800 -27000 -12700 -15100 -13500 -29400 -
25600 0];
% Матриця обмежень
A=[80 48 0 88 0 0 0 16 40 100 200 8;48 0 84 0 40 168 32 20 0 100 0 0;0 40 88
0 0 0 0 0 200 0 480 0;36 0 0 84 80 0 200 0 0 496 0 0;0 40 0 80 0 400 0 168 0 0 0
0;0 48 80 0 0 0 240 0 0 0 488 0;0 0 0 88 0 0 0 80 280 420 0 0;56 0 0 0 80 460 240
0 0 0 0 80;0 0 0 0 120 320 0 0 200 0 400 160;0 0 60 0 200 0 0 280 0 280 0 0;-1 -1
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;0 0 0 -1 -1 0 0 0 0 0 0 0;0 0 0 1 1 0 0 0 0
0 0 0 0;-0.1 -0.1 -0.1 -0.1 -0.1 -0.1 -0.1 -0.1 -0.1 -0.1 -0.1 -0.1 1;0.05 0.05 0.05 0.05 0.05
0.05 0.05 0.05 0.05 0.05 0.05 -1];
% Праві частини чистеми обмежень
B=[1993 1993 1993 1993 1993 1993 1993 1993 1993 1993 1993 1993 -15 30 -10 25 0 0];
lB=zeros(12,1)
% Програма для прямокутного представлення
K=1
for G=0:0.1:2
    AG=A+G*0.1*[80 48 0 88 0 0 0 16 40 100 200 8;48 0 84 0 40 168 32 20 0 100
0 0;0 40 88 0 0 0 0 200 0 480 0;36 0 0 84 80 0 200 0 0 496 0 0;0 40 0 80 0 400
0 168 0 0 0 0;0 48 80 0 0 0 240 0 0 0 488 0;0 0 0 88 0 0 0 80 280 420 0 0;56 0 0 0
80 460 240 0 0 0 0 80;0 0 0 0 120 320 0 0 200 0 400 160;0 0 60 0 200 0 0 280
0 280 0 0;0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0];
    [X,F]=linprog(f,AG,B,[],[],lB,[])
    GG(K)=G;
    FB(K)=-F;
    K=K+1;
end
```

## Додаток 2. Програма та М-файли задачі для еліпсоїдальної множини невизначеності

```
% Ellipsoidal set
% Цільова функція
function fe1= myfunel(x)
fe1=-2800*x(1)-2500*x(2)-5600*x(3)-5500*x(4)-13800*x(5)-27000*x(6)-
12700*x(7)-15100*x(8)-13500*x(9)-29400*x(10)-25600*x(11);

% Система обмежень (еліпсоїдальна область)
function [c, seq]=mycone1(x, W)
c(1)=80*x(1)+48*x(2)+88*x(4)+16*x(8)+40*x(9)+100*x(10)+200*x(11)+8*x(
12)+W*sqrt(8^2*x(1)^2+4.8^2*x(2)^2+8.8^2*x(4)^2+1.6^2*x(8)^2+4^2*x(9)^2+
10^2*x(10)^2+20^2*x(11)^2+0.8^2*x(12)^2)-1993;
c(2)=48*x(1)+84*x(3)+40*x(5)+168*x(6)+32*x(7)+20*x(8)+100*x(10)+W*sq
rt(4.8^2*x(1)^2+8.4^2*x(3)^2+4^2*x(5)^2+16.8^2*x(6)^2+3.2^2*x(7)^2+2^2*x(
8)^2+10^2*x(10)^2)-1993;
c(3)=40*x(2)+88*x(3)+200*x(9)+480*x(11)+W*sqrt(4^2*x(2)^2+8.8^2*x(3)^
2+20^2*x(9)^2+48^2*x(11)^2)-1993;
c(4)=36*x(1)+84*x(4)+80*x(5)+200*x(7)+496*x(10)+W*sqrt(3.6^2*x(1)^2+8
.4^2*x(4)^2+8^2*x(5)^2+20^2*x(7)^2+49.6^2*x(10)^2)-1993;
c(5)=40*x(2)+80*x(4)+400*x(6)+168*x(8)+W*sqrt(4^2*x(2)^2+8^2*x(4)^2+
40^2*x(6)^2+16.8^2*x(8)^2)-1993;
c(6)=48*x(2)+80*x(3)+240*x(7)+488*x(11)+W*sqrt(4.8^2*x(2)^2+8^2*x(3)^
2+24^2*x(7)^2+48.8^2*x(11)^2)-1993;
c(7)=88*x(4)+80*x(8)+280*x(9)+420*x(10)+W*sqrt(8.8^2*x(4)^2+8^2*x(8)^
2+28^2*x(9)^2+42^2*x(10)^2)-1993;
c(8)=56*x(1)+80*x(5)+460*x(6)+240*x(7)+80*x(12)+W*sqrt(5.6^2*x(1)^2+8
^2*x(5)^2+46^2*x(6)^2+24^2*x(7)^2+8^2*x(12)^2)-1993;
c(9)=120*x(5)+320*x(6)+200*x(9)+400*x(11)+160*x(12)+W*sqrt(12^2*x(5)
^2+32^2*x(6)^2+20^2*x(9)^2+40^2*x(11)^2+16^2*x(12)^2)-1993;
c(10)=60*x(3)+200*x(5)+280*x(8)+280*x(10)+W*sqrt(6^2*x(3)^2+20^2*x(5)
^2+28^2*x(8)^2+28^2*x(10)^2)-1993;
c(11)=-x(1)-x(2)+15;
c(12)=x(1)+x(2)-30;
c(13)=-x(4)-x(5)+10;
c(14)=x(4)+x(5)-25;
c(15)=-0.1*x(1)-0.1*x(2)-0.1*x(3)-0.1*x(4)-0.1*x(5)-0.1*x(6)-0.1*x(7)-
0.1*x(8)-0.1*x(9)-0.1*x(10)-0.1*x(11)+x(12);
c(16)=0.05*x(1)+0.05*x(2)+0.05*x(3)+0.05*x(4)+0.05*x(5)+0.05*x(6)+0.05*
x(7)+0.05*x(8)+0.05*x(9)+0.05*x(10)+0.05*x(11)-x(12);
seq=[];
% Програма для функції fmincon
```

```

K=1
for W=0:0.1:2
    [x, fe1, flag]=fmincon(@myfunel,[0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1
0.1],[],[],[],[],[0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0],[],@(x)mycone1(x, W))
    WW(K)=W;
    FE(K)=-fe1;
    K=K+1;
end.

```



```

0 -1 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 -1 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -1; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -1; 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 -1; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -1];
% Блочна матриця
D=[A1 A2;A3 A4]
A11=zeros(16,12)
A21=[1 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 1 0 0 0 0 0
0 0; 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0; 0
0 0 0 0 0 0 0 1 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0];
A31= zeros(50,12)
A41= zeros(50,10)
D1=[A11 A21;A31 A41]
E=[1993 1993 1993 1993 1993 1993 1993 1993 1993 1993 1993 1993 -15 30 -10 25 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0];
lE=zeros (22,1)

% Програма для полієдральної множини невизначеності
K=1
for Q=0:0.1:2
DQ=D+Q*D1
[X,F]=linprog(C,DQ,E,[],[],lE,[])
QQ(K)=Q;
FP(K)=-F;
K=K+1;
end

%График для трех функций, учитывая те же имена переменных
p = plot(GG, FB, '-om', WW, FE, '-xb', QQ, FP, '-*g')
p(1).LineWidth = 1.5
p(2).LineWidth = 1.5
p(3).LineWidth = 1.5
legend('box.', 'elipsoidal.', 'polyhedral.')
xlabel('Бюджет невизначеності')
ylabel('Цільова функція')

```



**Додаток 4. Розв'язання цілочислової задачі для прямокутного представлення множини невизначеностей.**

```
%Box
% Цільова функція
f=[-2800 -2500 -5600 -5500 -13800 -27000 -12700 -15100 -13500 -29400 -
25600 0];
% Матриця обмежень
A=[80 48 0 88 0 0 0 16 40 100 200 8;48 0 84 0 40 168 32 20 0 100 0 0;0 40 88
0 0 0 0 0 200 0 480 0;36 0 0 84 80 0 200 0 0 496 0 0;0 40 0 80 0 400 0 168 0 0 0
0;0 48 80 0 0 0 240 0 0 0 488 0;0 0 0 88 0 0 0 80 280 420 0 0;56 0 0 0 80 460 240
0 0 0 0 80;0 0 0 0 120 320 0 0 200 0 400 160;0 0 60 0 200 0 0 280 0 280 0 0;-1 -1
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;0 0 0 -1 -1 0 0 0 0 0 0 0;0 0 0 1 1 0 0 0 0
0 0 0;-0.1 -0.1 -0.1 -0.1 -0.1 -0.1 -0.1 -0.1 -0.1 -0.1 -0.1 1;0.05 0.05 0.05 0.05 0.05
0.05 0.05 0.05 0.05 0.05 0.05 -1];
% Праві частини системи обмежень
B=[1993 1993 1993 1993 1993 1993 1993 1993 1993 1993 1993 -15 30 -10 25 0 0];
LB=[0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0];
% Задання цілочислових змінних
intcon=1:12
% Програма для розв'язання
K=1
for G=0:0.1:2
    AG=A+G*0.1*[80 48 0 88 0 0 0 16 40 100 200 8;48 0 84 0 40 168 32 20 0 100
0 0;0 40 88 0 0 0 0 0 200 0 480 0;36 0 0 84 80 0 200 0 0 496 0 0;0 40 0 80 0 400
0 168 0 0 0 0;0 48 80 0 0 0 240 0 0 0 488 0;0 0 0 88 0 0 0 80 280 420 0 0;56 0 0 0
80 460 240 0 0 0 0 80;0 0 0 0 120 320 0 0 200 0 400 160;0 0 60 0 200 0 0 280
0 280 0 0;0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0];
    [X,F]=intlinprog(f,intcon,AG,B,[],[],LB,[])
    GG(K)=G;
    FB(K)=-F;
    K=K+1;
end
```



```

% Блочна матриця
D=[A1 A2;A3 A4]
A11=zeros(16,12)
A21=[1 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 1 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 1 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 1 0 0 0 0 0
0 0; 0 0 0 0 1 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 1 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 1 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 1 0; 0
0 0 0 0 0 0 0 1 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 1; 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0
0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0];
A31= zeros(50,12)
A41= zeros(50,10)
D1=[A11 A21;A31 A41];
%Права частина системи обмежень
E=[1993 1993 1993 1993 1993 1993 1993 1993 1993 1993 1993 1993 -15 30 -10 25 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0];
IE=zeros (22,1)
% Задання цілочислових змінних
intcon=1:12
% Програма для знаходження розв'язку
K=1
for Q=0:0.1:2
DQ=D+Q*D1
[X,F]= intlinprog(C,intcon,DQ,E,[],[],IE,[])
QQ(K)=Q;
FP(K)=-F;
K=K+1;
end
%Графік для двох цілочислових функцій
p = plot(GG, FB, '-om', QQ, FP, '-*g')
p(1).LineWidth = 1.5
p(2).LineWidth = 1.5
legend('box.','polyhedral')
xlabel('Бюджет невизначеності')
ylabel('Цільова функція')

```